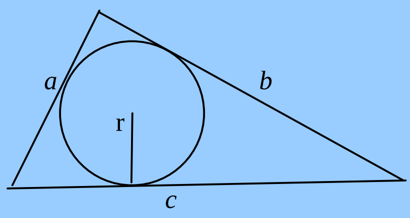
9. 4. OKRAG WPISANY W TRÓJKĄT I OKRĄG OPISANY NA TRÓJKĄCIE

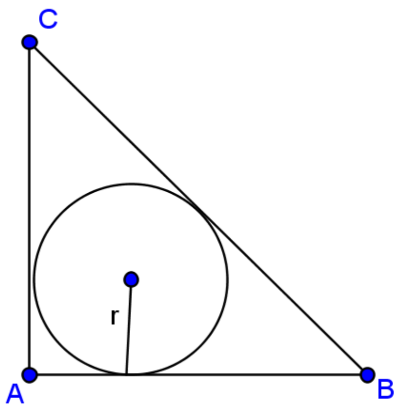
Okrąg wpisany w trójkąt



- <u>środkiem okręgu wpisanego w trójkąt</u> jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.
- wzór na <u>promień okręgu wpisanego w trójkąt</u>

$$r = \frac{2P}{a+b+c} \quad \text{gdzie } P \text{ – pole trójkąta}$$

<u>Przykład 9.4.1.</u> Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny równoramienny. Oblicz obwód trójkąta.

Rozwiązanie	Komentarz
 $\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert = a \qquad \lvert BC\rvert = b$ **Dane:** $r = 2$ **Szukane:** Ob **Wzory:** $Ob = 2a + b$ $r = \frac{2P}{2a+b}$ $P = \frac{1}{2}a \cdot a$	Analiza zadania.
$r = \frac{2P}{2a+b}$ $2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a}{2a+b}$ $2(2a+b) = a^2$ $4a + 2b = a^2$	Wykorzystując wzór $r = \frac{2P}{2a+b}$ układamy równanie z niewiadomymi a i b.
$a^2 + a^2 = b^2$ $2a^2 = b^2$ $b = a\sqrt{2}$	Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa układamy drugie równanie z niewiadomymi a i b i zapisujemy układ równań.

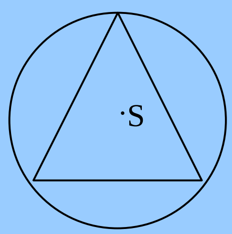
$\begin{cases} b = a\sqrt{2} \\ 4a + 2b = a^2 \end{cases}$ $4a + 2\cdot a\sqrt{2} = a^2 \;/ : a$ $4 + 2\sqrt{2} = a$ $b = a\sqrt{2} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 4$	Układ równań rozwiązujemy metodą podstawiania. Równanie możemy podzielić przez a , bo $a > 0$ Obliczamy b
$Ob = 2a + b = 2\left(4 + 2\sqrt{2}\right) + 4\sqrt{2} + 4 =$ $= 8 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4 = 12 + 8\sqrt{2}$	Obliczamy obwód trójkąta.

Okrąg opisany na trójkącie

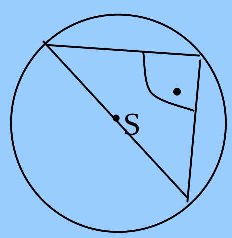
- <u>środkiem okręgu opisanego na trójkącie</u> jest punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta

S – środek okręgu

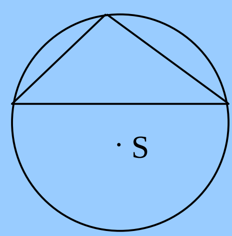
okrąg opisany na trójkącie ostrokątnym

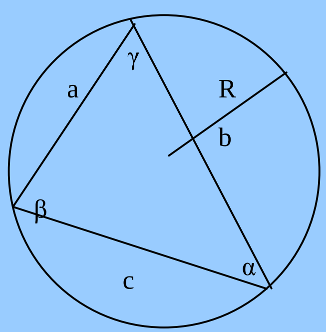


okrąg opisany na trójkącie prostokątnym



okrąg opisany na trójkącie rozwartokątnym





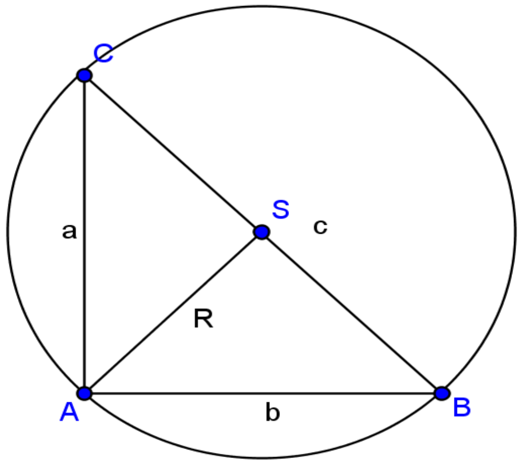
- wzory <u>na promień okręgu opisanego na trójkącie</u>

$$R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4P}$$ gdzie P – pole trójkąta

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

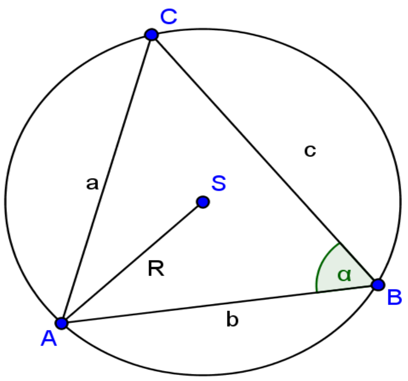
Wzór na promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym: $R = \frac{1}{2}c$

Przykład 9.4.2. Trójkąt prostokątny jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli stosunek długości przyprostokątnych wynosi $\frac{3}{4}$.

Rozwiązanie	Komentarz
 **Dane:** $R=4$, $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ **Szukane:** P **Wzory:** $R=\frac{1}{2}c$, $P=\frac{1}{2}a\cdot b$	Analiza zadania.
$4=\frac{1}{2}c\ /\cdot 2$ $8=c$	Wykorzystując wzór $R=\frac{1}{2}c$, obliczamy *c*.
$a^2+b^2=c^2$ $a^2+b^2=64$ $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{3}{4} \\ a^2+b^2=64 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{3}{4}b \\ \left(\frac{3}{4}b\right)^2+b^2=64 \end{cases}$	Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa układamy równanie z niewiadomymi *a* i *b*. Budujemy układa równań, który rozwiązujemy metodą podstawiania.

$\frac{9}{16}b^2+\frac{16}{16}b^2=64$ $\frac{25}{16}b^2=64/\cdot\frac{16}{25}$ $b^2=\frac{1024}{25}$ $b=\frac{32}{5}$ $a=\frac{3}{4}b=\frac{3}{4}\cdot\frac{32}{5}=\frac{24}{5}$	Obliczamy *a*
$P=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{5}\cdot\frac{32}{5}=\frac{384}{25}$	Obliczamy pole trójkąta.

Przykład 9.4.3. Okrąg o promieniu długości $2cm$ jest opisany na trójkącie. Znajdź długość boku tego trójkąta wiedząc, że kąt leżący naprzeciw tego boku ma miarę $30°$.

Rozwiązanie	Komentarz
 **Dane:** $R=2cm$, $\alpha=30°$ **Szukane:** a **Wzory:** $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$	Analiza zadania.
$2=\frac{a}{2\sin 30°}$ $2=\frac{a}{2\cdot\frac{1}{2}}$ $2=a$	Obliczamy a, wykorzystując wzór: $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 9.4.1. (3pkt) Okrąg o promieniu długości $1{,}5cm$ jest wpisany w trójkąt równoramienny . Oblicz pole tego trójkąta wiedząc ,że jego podstawa ma $6\,\mathrm{cm}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie układu równań z niewiadomą *h* – wysokość trójkąta oraz *b* – ramię trójkąta.	1
2	Podanie wysokości trójkąta *h*.	1
3	Podanie pola trójkąta.	1

Ćwiczenie 9.4.2. (3pkt) Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym wynosi $4cm$. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jeden z kątów ostrych wynosi $30°$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości przeciwprostokątnej.	1
2	Podanie długości przyprostokątnych.	1
3	Podanie pola trójkąta.	1

Ćwiczenie 9.4.3. (3pkt) Podstawa trójkąta równoramiennego wynosi 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli wysokość opuszczoną na podstawę w stosunku $3:5$. Oblicz obwód trójkąta.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości odcinków na jakie środek okręgu dzieli wysokość trójkąta.	1
2	Podanie długości ramienia trójkąta.	1
3	Podanie obwodu trójkąta.	1

Ćwiczenie 9.4.4. (2pkt) W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami wynosi $120°$, a wysokość opuszczona na podstawę ma długość $6\,\mathrm{cm}$. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości ramienia trójkąta	1
2	Podanie promienia okręgu opisanego na trójkącie.	1